维普资讯 http://www.cqvip.com

图论的源流及其应用

刘 余，王青建

（辽宁师范大学 数学学院，辽宁 大连 116029）

摘 要：系统阐述图论的起源、发展过程及其广泛应用，并指出图论在学习数学中的作用。

关键词：图论；柯尼斯堡七桥问题；发展；应用

中图分类号：G642 **文献标识码**：A **文章编号**：1008-388X(2007)03-0024-03

图论是数学的一个分支，以图为研究对象。图论中的图是若干给定的点及连接两点的线所构成的图形，这种图形通常用来描述某些事物之间的某种特定关系，用点代表事物，用连接两点的线代表相应的两个事物间具有这种关系。这种图中点的位置和线的长短曲直无关紧要。[1]有些专家认为图论是关于网络的数学理论。也有专家认为图论是研究离散对象之间的关系。

图论与数学的其他分支不同，不像群论、拓扑学等其他学科那样有一整套较完整的理论体系和解决问题的系统方法。图论所涉及的问题比较广泛，解决问题的方法也多种多样，常常是一种问题一种解法，而这些方法之间又缺乏必然联系。许多数学分支是由计算、运动、测量问题引起的，促使图论产生和发展的却是一些数学游戏问题。尽管这些游戏表面简朴，实质却能激发数学家的兴趣。图论发源于18世纪东普鲁士(Eastern Prussia)的柯尼斯堡(Königsberg)，已有200多年的历史。

一、图论的起源

柯尼斯堡始建于1308年，作为东普鲁氏王朝的都市，后来归于苏联叫加里宁格勒。城内的一条河的两条支流绕过一个岛，有七座桥横跨这两支流。当地市民们有一项消遣活动，就是试图将河上的每座桥恰好走过一遍并回到原出发点，然而无数次的尝试从来没有人成功。直到1736年，欧拉(L. Euler，1707-1783)解决了这一问题。他将这个问题转化为图论问题，即把每一块陆地用一个点来代替，将每一座桥用连接相应两个点的一条线来代替，从而得到一个点线图。欧拉证明了柯尼斯堡七桥问题没有解，并且推广了这个问题，给出了任意一种河一桥图能否全部不重复、不遗漏走一次的判定法则：如果通过奇数座桥连接的地方不止两个，满足要求的路线不存在；如果只有两个地方通过奇数座桥连接，则可从其中任一地方出发找到所要求的路线；如果没有一个地方通过奇数座桥连接，则从任一地出发，所求路线都能实现。他还说明怎样快速找到所要的路线，并为此设计了一个15座桥的问题。欧拉的论文在圣彼得堡科学院作了报告，成为图论历史上第一篇重要文献。[2]344这项工作使欧拉成为图论(及拓扑学)的创始人。那时不少问题都是围绕游戏而产生的。柯尼斯堡七桥问题就是图论发展萌芽时期最具代表性的问题。但当时数学界并未对欧拉解决七桥问题的意义有足够认识，甚至仅仅视其为一个游戏而已。

二、图论的发展

1750年，欧拉和他的一个朋友哥德巴赫(C. Goldbach)通信时说发现了多面体的一个公式：设多面体的顶点数为N_v，棱数为N_e，面数为N_f，则有$N_v - N_e + N_f = 2$。欧拉多面体公式表述了几何图形的一个基本组合性质，其目的是利用这一关系将多面体进行分类。这类问题成为19世纪后半叶拓扑学研究的主要问题。[3]由它还可派生出许多同样美妙的东西，堪称“简单美”的典范。例如：连通平面图的点数n、边数e、面数f满足$n - e + f = 2$，[4]它是近代数学两个重要分支——拓扑学与图论的基本公式。由这个公式得到的许多结论，对拓扑学与图论的发展都起了很大的作用。

从19世纪中叶开始，图论进入第二个发展阶段。这一时期图论问题大量出现，诸如关于地图染色的四色问题、由“周游世界”游戏发展起来的哈密顿问题以及与之相关联的可平面图问题等。

最早记载四色猜想问题的是英国伦敦大学的数学教授德摩根(De Morgan)。他在1852年10月23日写给哈密顿(William Rowan Hamilton)的信中记载了他的学生格斯里(Frederick Guthrie)向他请教的一个问题：任何地图，是否至多用四种颜色就可以把每个国家的领土染上一种颜色，且使相邻之国异色。德摩根不能判断这个猜想是否成立，于是写信给哈密顿。这个问题很快在数学界流传开来。后来成为一个具有世界意义的重要数学问题。经过多少代人的努力，最后在20世纪70年代，美国伊利斯诺大学教授阿佩尔(K. Appel)和哈肯(W. Haken)开始利用改进的放电过程进行证明。1976年1月到6月，阿佩尔和哈肯利用三部计算机运转

收稿日期：2007-04-02
作者简介：刘余(1984-)，女，山西武乡人。

维普资讯 http://www.cqvip.com

了1200个小时,分析了两千多个构形的可约性,并通过人工分析了约一万个带正电顶点的邻近区域,终于用不可避免组的方法证明了四色问题。[5]四色问题的研究对平面图理论、代数拓扑学、有限射影几何和计算机编码程序设计等理论的发展起了推动作用。

"周游世界"问题最初表述为:在8×8格的国际象棋棋盘上,象棋中的马——"骑士"能否从某个格子出发,一次不重复地跳遍所有64个格子,最后再回到出发点?该问题又被称为"骑士周游世界问题"。相应的图为64个顶点,棋盘上的每个方格为一个顶点,当"骑士"按规则从一个顶点走到另一个顶点时,两点之间连一条边,问题是要求我们选择由64条边组成并通过每个顶点的一条轨道。该问题与前面论述的欧拉问题有区别:桥的问题要求依次走过图中的每条边,但一个顶点可以重复走多次,骑士问题只需用其中的一些边通过每个顶点刚好一次。这种不同可以用探险者和旅游者来类比:探险者考察所有可以走的路线,而旅游者只希望恰好参观一次。1757年,欧拉在写给哥德巴赫的一封信中给出该问题的一种解法,得到绝对中心对称图。1759年,欧拉又专门写文章讨论各种棋盘的周游世界问题,指出对那种具有奇数个格子的棋盘,该问题无解。1771年,法国数学家旺德蒙德(Vandermonde)在巴黎法国科学院一份学报上发表论文,将几何问题划归为算术问题,引入坐标概念和特殊符号表示覆盖棋盘的"路",得到周游世界问题的一般方法和多种答案。[2]347

1857年,英国数学家哈密顿(William Rowan Hamilton)将这类问题扩展为立体形式,发明一种被称为真正的"周游世界问题"。哈密顿最初研究的是非交换代数,即在乘法运算中不一定满足 。有许多非交换组,其中一个哈密顿用规则的十二面体图解释说明。1856年10月7日,他在一封信中首次陈述了这个发现,接着发表文章。后来,哈密顿以这个图的解释为原则设计了一种游戏,称为"Icosian游戏"。1857年,他在都柏林不列颠协会上展示了这种游戏,并且十分骄傲地将该专利以25英镑转让给一位批发贸易商。这个游戏1859年上市,附带有哈密顿亲自编写的印刷体说明手册。读者会明白该游戏的目的,即在十二面体图上找到满足某种具体条件的轨道和回路。其中,第一个问题就是沿着各边通过每个顶点刚好走一次的回路。

哈密顿游戏的另一种说法是:用一个规则的实心正十二面体,将它的20个顶点标以世界著名的20个城市,每个顶点用钉子标志,一条线顺着这些钉子绕过表示一条回路或轨道,要求游戏者找一条沿着各边并通过每个顶点刚好一次的闭回路,即"周游世界"。用图论的语言来说,游戏的目的是在正十二面体的图中找出一个哈密顿圈。这个问题被称为哈密顿问题。由于运筹学、计算机科学和编码理论中的很多问题都可以化为哈密顿问题,从而引起广泛的注意和深入研究。

有一个古典难题涉及嵌入问题与平面图,名叫"三井三屋"问题。问题是要求把3口井与3间屋对应连接起来,使得连接的管线都不相交。如果这种图存在,则称它是一个平面图。一般地,如果一个图G可以画在一个曲面S上,使得任何两边都不相交,则称G可以嵌入到S内。如果一个图可以嵌入到平面内,则说它是一个可平面图。嵌入概念反映了两个图之间的同构对应关系。三井三屋问题在平面上无法实现,即它是不可平面的。很多人致力于图的可平面性研究,1930年波兰数学家C. K. 库拉托夫斯基(Kuratowski)提出可平面图的一个重要条件,1973年中国数学家吴文俊用代数拓扑方法给出了解决平面制定问题的新途径。平面图问题的研究成果已经在交通网络和印刷线路的设计等方面得到应用。早期图论主要用来讨论游戏中存在的问题。这个时期也出现了以图为工具去解决其他领域中一些问题的成果,比如把树的理论应用到化学和电网络分析等。1847年,德国数学家基希霍夫(Kirchhoff)应用图论的方法分析电网络,奠定了现代网络理论的基础,就是电工原理中的基希霍夫电流定律和基希霍夫电压定律,这是图论在工程技术领域的第一次应用。1857年,英国数学家凯莱(Cayley)在试算饱和碳化氢的同分异构体时,提出了"树"的概念,同时概述了一种求无根树个数的方法。他把这一类化合物的记数问题抽象为计算某类树的个数问题,在这类树中,要求关联到每个点线的条数是1或4,树上的点对应一个氢原子或一个碳原子。这一问题成为图的记数理论的起源。

1936年,匈牙利数学家哥尼格(Dénes König)发表了第一本图论专著《有限与无限图理论》,他总结了图论200年的成果,是图论发展史上的一座里程碑,并标志着图论成为一门独立的数学分支。[6]此后图论进入第三个发展阶段。20世纪40-60年代,拟阵理论、超图理论、极图理论,以及代数图论、拓扑图论等都有很大的发展。由于生产管理、军事、交通运输、计算机以及通信网络等方面提出大量实际问题的需要,特别是许多离散化问题的出现,以及由于大型高速电子计算机的问世使得许多大规模计算问题的求解成为可能,图论的理论及其应用研究得到飞速发展。尤其是网络理论的建立,图论与线性规划、动态规划等优化理论和方法的互相渗透,促使和丰富了图论研究的内容及其应用。近几十年来,图论在通讯网络的设计分析、电网络分析、印刷线路板分析、信号流图与反馈理论、计算机流程图等众多领域都大显身手,进入发展与突破的快车道。现代图论已是数学中的重要学科,并繁衍出许多新分支,如算法图论、极值图论、网络图论、代数图论、随机图论、模糊图论、超图论等。

三、图论的应用

图论不但能应用于自然科学,也能应用于社会科学。例如广泛应用于电信网络、电力网络、运输能力、开关理论、控制论、反馈理论、随机过程、可靠性理论、化学化合物的辨认、计算机程序设计、故障珍断、人工智能、印制电路板设计、图案识辩、地图着色、情报检索,也应用于诸如语言学、社会结

维普资讯 http://www.cqvip.com

构、经济学、兵站学(logistics,亦叫后勤学)、遗传学等方面。运筹学、计算机科学和编码理论中的很多问题也都可以转化为图论问题。

人们在生活中常常要用到图论的方法。比如:匹配可应用于毕业生招聘问题,如 m 家高科技公司到科技大学的研究生院招聘经理,每家公司只招收一名,只要是该校研究生院的毕业生他们都满意。但毕业生中每人心目中都有一个自己可以接受的公司清单,即不是任何公司他们都会应聘。设有 n 名毕业研究生 $v_1,v_2,\cdots,v_n$,m 家招聘公司为 $u_1,u_2,\cdots,u_m$,问是否每位毕业研究生都能得到他可以接受的工作岗位? 如果不可能,最多可能有多少毕业生满意? 构造一个二分图 G,$V(E)=X\cup Y$, X、Y 是 G 的二分图顶划分,其中 $X=\{v_1,v_2,\cdots,v_n\}$,$Y=\{u_1,u_2,\cdots,u_m\}$,仅当 vi 可以接受的公司为 u_j 时,在顶 v_i 和 u_j 之间连一条边,由此构成一个应聘图 G。运用图论中的匈牙利算法可求得 G 中的最大匹配,即为所求结果。

图论在交通运输中应用的例子也比比皆是。例如:欧拉路可以应用到城市街道单行线与双行线的合理布局,有助于合理控制交通运输的目的;1956 年,Kruskal 设计的求连通加权图的最优树算法,可应用于修筑连接 n 个城市的铁路,已知 i 城和 j 城间的铁路造价 $\omega(ij)$,设计一个筑路图,使总造价最低。还可应用于最佳追捕问题,逃犯若干,在公路网上逃窜,问最少派几名刑警,才能保证把逃犯全部抓获归案;城市的交通网可以归结为支撑树问题去解决;最大网络流可应用于商品运输问题。1960 年我国数学家管梅谷教授首先提出了中国邮递员问题:一个邮递员要走遍他负责的投递范围内的每一条街道,完成送信任务后回到邮局,他应按什么路线走才能使总路程最短? Dijkstra 算法可应用在类似问题的所有求最短路径问题当中。

图论在机械制造中的工艺过程分析、工艺尺寸链和装配尺寸链的计算等方面也有应用,为编制工艺规程中确定工序尺寸,提供了直观、方便、快速、准确的方法。

图论的遍历算法与当前广泛使用的搜索引擎有关系。互联网其实就是一张大图,我们可以把每一个网页当作一个节点,把那些超链接(Hyperlinks)当作连接网页的弧。网页中那些蓝色的、带有下划线的文字隐藏着网址,一经点击,浏览器通过这些隐含的网址转到相应的网页中。有了超链接,我们可以从任何一个网页出发,用图的遍历算法,自动地访问到每一个网页并把它们储存起来。完成这个功能的程序叫做网络爬虫,或者在一些文献中称为"机器人"(Robot)。图论中的树可以用来研究计算机的动态存贮分配和编码等问题,决策树是系统分析的重要工具。图论与计算机科学的结盟解决了有关离散事物的结构与关系当中定性与定量的各种优化问题。借助于计算机,图论又用于求解生产管理、军事、交通运输以及通信网络中的许多离散性问题,同时图论中一些著名问题也借助于计算机得到了证明。可见,图论与计算机有着密切的联系。在计算机盛行的时代,现代人的工作生活都离不开图论。

四、图论在学习数学中的作用

美国著名的《科学美国人》杂志社发行了一套数学悖论幻灯片"Paradox Box"(悖论箱),在前言中指出:趣味数学具有重大的教育学价值。为了激发人们学习数学的兴趣,一些科学研究者编写了许多书籍。这些书籍既可以当作休闲娱乐小品随便翻翻,有助于排遣工作疲劳、俗事烦恼;也可以作为教师参考资料,有助于活跃课堂气氛,启迪学生心智;还可以作为学生课外读物,有助于开阔眼界、增长知识、锻炼逻辑思维能力。在这些书中,图论是不可缺少的部分。

此外,图论已渗透到组合学、矩阵论、群论、运筹论、计算机科学、管理科学、分子化学、管理科学、系统工程等领域。在信息科学与网络技术迅猛发展的时期,图论强有力的逻辑,漂亮的图形,高明的数学技巧,将会越来越受众多科学爱好者的青睐。

参考文献:

[1]《中国大百科全书》数学编辑委员会. 中国大百科全书 · 数学[Z]. 北京:中国大百科全书出版社,1988:679.

[2]王青建. 数学史简编[M]. 北京:科学出版社,2004.

[3]杜瑞芝. 简明数学史辞典[Z]. 山东教育出版社,1991:374.

[4]Douglas B. West. 图论导引[M]. 李建中,骆吉洲,译. 北京:机械工业出版社,2006:191.

[5]武锡坏,郭宗明. 数学史与数学教育[M]. 成都:电子科技大学出版社,2003:378-383.

[6]王树禾. 图论[M]. 北京:科学出版社,2004:2.

[责任编辑:惠子]

Origin and Application of Graph Theory

LIU Yu, WANG Qing-jian

(*Mathematics College, Liaoning Normal University, Dalian* 116029, *China*)

Abstract: It systematically discusses the origin, development and application of graph theory, and points out the role of graph theory in studying mathematics.

Key words: graph theory; development; application